فصلنامــه علمی پژوهشی دانش سرمایه‌گــذاری
سال هفتم/ شماره بیست‌وششم/ تابستان ۱۳۹۷

# بررسی امکان بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری با حداقل ساختن ارزش در معرض ریسک شرطی مبتنی بر مدل کاپولا و داده‌های شبیه‌سازی شده در بورس اوراق بهادار تهران

**اسماعیل لــله‌گانی**
دکتری مدیریت بازرگانی، دانشگاه علامه طباطبائی، تهران، ایران

**مصطفی زه‌تابیان**
کارشناسی ارشد مالی، دانشگاه امام صادق(ع) تهران، ایران. (نویسنده مسئول)
mzzehtabian@gmail.com

تاریخ دریافت: ۹۵/۱۲/۲۳ تاریخ پذیرش: ۹۶/۰۲/۱۱

## چکیده

مطالعات متعدد در بازارهای مالی جهان موید این واقعیت هستند که می توان با بکارگیری معیارهای متناسب با ساختار و ویژگی های داده های مورد مطالعه، کارکرد مدل های مورد بررسی را به نحو قابل توجهی بهبود داد. در این میان تابع کاپولا از جمله مدلهایی است که در تعیین روابط توام متغیرهای مدل، توجه زیادی را به خود معطوف ساخته است.

در این پژوهش، در بهینه‌سازی پورتفویی از شاخص صنایع در بورس اوراق بهادار تهران با هدف حداقل ساختن ارزش در معرض ریسک شرطی، داده‌های شبیه‌سازی شده براساس همبستگی ناشی از تابع کاپولا و توزیع تعمیم یافته پارتو بعنوان ورودی مدل مبنای بررسی قرار گرفت. براساس آزمون آماری صورت گرفته با بکارگیری این رویه، عملکرد پورتفوی به طور معناداری بهبود می‌یابد.

**واژه‌های کلیدی:** بهینه‌سازی پورتفوی، تابع کاپولا، ارزش در معرض ریسک شرطی، توزیع تعمیم یافته پارتو.

## ۱- مقدمه

در مدل‌های تخصیص دارایی‌ها، خصوصیات ریسک – بازده برای سرمایه‌گذاران بسیار با اهمیت و قابل توجه هستند. تئوری پورتفوی سنتی ضرایب همبستگی خطی و انحراف معیار را جهت ارزیابی ریسک پورتفوی و در شرایط توزیع نرمال چندمتغیره بکار می‌گیرد. جهت محقق گردیدن پورتفوی بهینه، ریسک پورتفوی به ازای سطوح بازده حداقل می‌گردد. در محاسبه ضرایب همبستگی در اجرایی ساختن بهینه‌سازی در عمل و تجربه، معمولا ضریب همبستگی پیرسون مبنا قرار می‌گیرد و این در حالیست که معیار مذکور به اندازه‌گیری رابطه خطی میان متغیرهایی با توزیع نرمال می‌پردازد. به‌طور دقیق‌تر، توابع کاپولا می‌توانند ساختار وابستگی را در توزیع های غیر نرمال نیز تبیین نمایند. بعلاوه اینکه این توابع از انعطاف‌پذیری بالایی برخوردار بوده و می‌توانند در تحلیل روابط خطی، غیر خطی و دنباله‌ای به کار گرفته شوند[۳].

در تحلیل‌های مالی مدرن، شواهد مبتنی بر غیر نرمال بودن توزیع متغیرهای بازده مالی، رو به افزایش است. در مدیریت ریسک سنتی، رویکرد ارزش در معرض ریسک VaR و تئوری میانگین – واریانس[۱] مارکویتز[۲] به فرض نرمال بودن توزیع داده‌ها وابسته هستند. از آنجا که توزیع نرمال چند متغیره به سهولت مدل مناسبی برای توزیع توام بسیاری از متغیرهای مالی نیست، بسیاری از پژوهشگران را به جستجوی مدل‌های چندمتغیره متناسب سوق داده است. کاپولا مدل درخوری است که گزینه جایگزینی را برای ضرورت برقراری فرض نرمال بودن میان متغیرها فراهم می‌نماید[۴].

کاپولاها توابع توزیع توأم را به توزیع حاشیه‌ای هر یک از متغیرها متصل کرده و ساختار وابستگی داده‌های چندمتغیره را به‌خوبی توصیف می‌کنند[۱۱].

ارزش در معرض ریسک یکی از مهم‌ترین معیارهای ارزیابی ریسک مالی است. این معیار حداکثر زیان ممکن را در سطح اطمینان معینی برآورد می‌نماید. سنجه ریسک جایگزین برای VaR، معیار ارزش در معرض ریسک شرطی CVaR می‌باشد[۳]. این معیار، زیان مورد انتظار را برابر و یا بالاتر از ارزش در معرض ریسک، در سطح اطمینان مشخص، برآورد می‌کند. از اینرو این دیدگاه نسبت به دیدگاه قبلی محافظه‌کارتر است[۷].

با توجه به جنبه احتیاطی ارزش در معرض ریسک شرطی و کاربرد بیشتر آن در سال‌های اخیر، در تحقیق پیشرو بر این معیار به عنوان شاخص ریسک تمرکز شده است. براین اساس در این پژوهش، نتایج حاصل از بکارگیری توابع کاپولا در تعیین همبستگی میان بازدهی دارایی ها و بهینه سازی با حداقل ساختن ریسک در قالب معیار ارزش در معرض ریسک شرطی در بهبود عملکرد پورتفوی، مورد توجه قرار گرفته است.

پس از مروری بر پیشینه پژوهش های داخلی و خارجی صورت گرفته، مدل های بنیادین این مطالعه از نظر می‌گذرد. در پایان نیز نتایج حاصل از آزمون مدل مورد بررسی در بازار سرمایه کشور و پیشنهادات مربوط ارائه می‌شود.

## ۲- مبانی نظری و مروری بر پیشینه پژوهش

از انجا که مدل های بهینه سازی پورتفو، کاپولا و ارزش در معرض ریسک شرطی مدل‌هایی بنیادین در انجام این پژوهش می‌باشند، در این قسمت پیشینه پژوهشی مختصری از هریک و کارکرد مربوط به اختصار شرح داده می‌شود.

- **بهینه سازی پورتفو براساس مدل مارکویتز**

هدف از حل مسائل انتخاب سبد سرمایه گذاری(پرتفوی) انتخاب پورتفویی است که از بین یک مجموعهدارایی های در دسترس، افزون بر کمینه سازی ریسک پرتفوی، یک سطح حداقلی از بازده پرتفوی را نیز برای سرمایه گذار برآورده کند. مدل پایه ای مسئله انتخاب پورتفوی را نخستین بار مارکویتز مطرح کرد[۲۱].

به این ترتیب، اگرچه در مطالعات مختلف مدل های متنوعی جهت دستیابی به اوزان بهینه درپورتفوی ارائه شده است، مدل بهینه سازی مارکویتز یکی از مدل های بنیادین با هدف کمینه ساختن ریسک پورتفوی می باشد. در این پژوهش نیز ریسک پورتفوی برمبنای مدل بهینه سازی مارکویتز حداقل می گردد.

هـری مـارکویتز در سـال ۱۹۵۲ مـدل پیشنهادی خود را برای انتخاب پورتفوی ارائه نمود . مدل میانگین واریـانس مـارکوویتز مشـهورترین و متداول ترین رویکرد در مسئله انتخاب سرمایه گذاری است. کاراترین ابزار بـرای انتخـاب پورتفـوی بهینه، مدل برنامه ریزی ریاضی ارائه شده توسط ماركوویتز میباشد. از برجسته ترین نکـات قـابل توجه در این مدل، توجه به ریسک سرمایه گذاری نه تنها بر اساس انحراف معیار یک سهم، بلکه بـراساس ریسک مجموعه سرمایه گذاری است.

داده های مدل مارکویتز عبارتند از: بازده، ریسک و ضریب همبستگی.

مارکویتز برای اولین بار معیار مشخصی برای محاسبه ریسک سبد سهام ارایه کرد و براساس سبد سرمایه گذاری کارا که مبتنی بر بهترین حالات ریسک و بازده برای یک سرمایه گذار و انتخاب سبدی بهینه است مدل خود را اسخراج نمود[۱۶].

برای به دست آوردن پورتفوی حداقل واریانس، برای یک سطح خاصی از بازده، لازم است مسئله برنامه ریزی غیرخطی زیر حل شود:

$$Min\, z = \sigma_p^2$$
$$\bar{r}_p = \sum_{j=1}^{M} w_i \bar{r}_i$$
$$\sum_{j=1}^{M} w_j = 1$$
$$w_j \geq 0$$

$\sigma_p^2$ برابر واریانس پورتفوی، $r_p$ بازده مورد انتظار پورتفوی و $w_j$ میزان سرمایه گذاری در هر سهم می باشد[۱۷].

حال چنانچه این مدل به ازای مجموعه ای از مقادیر مختلف سطح حداقلی بازده پورتفوی، به طور مکرر حل شود و در ادامه نمودار بازده ریسک پورتفوی به ازای جواب های مختلف ترسیم شود، مجموعه نقاطی با عنوان مرز کارا محقق می گردد.

پس از ارائه مدل مارکویتز، مدل های متعددی بر توسعه و بهبود مدل مذکور متمرکز گردیده اند. افشارکاظمی و همکاران (۱۳۹۲) قضیه کاهش یا قضیه همگرایی را مطرح نموده و با استفاده از مدل مارکویتز و مدلی که با توجه به مدل مارکویتز و متد همگرایی مطرح شد با بکارگیری الگوریتم ژنتیک تایید نمودند که بر خلاف مدل مارکویتز همیشه متوع ساختن سبد مناسب نیست و بهتر است از یک جایی به بعد پرگونه سازی را متوقف کرد[۱۶].

رستمی و نیک نیا (۱۳۹۲) ریسک مربوط به قیمت های سهام بیست و دو شرکت منتخب از بورس اوراق بهادار تهران و همچنین پرتفوی های متشکل از این سهام مورد بررسی قرار می دهند و در کنار مطالعات داخلی، اهمیت تنوع بخشی بین المللی نیز با تشکیل پرتفویی از شاخص های قیمتی سهام متشکل از کشورهای نوظهور و توسعه یافته مورد توجه قرار داده اند. برای درک تأثیر تنوع بخشی بر ریسک هر پورتفوی، از مفهوم ارزش در معرض ریسک( VaR) استفاده کردند. نتایج این تحقیق، نشان داد که تنوع بخشی داخلی ریسک را تقلیل می دهد و نتیجه قابل توجه تر اینکه تنوع بخشی بین المللی ریسک را به طور قابل ملاحظه ای کاهش می دهد[۱۷].

صادقی شریف و همکاران (۱۳۹۵) عملکرد پرتفوی تشکیل شده بر مبنای استراتژی سرمایه‌گذاری قوی سیاه در مقایسه با پرتفوی شاخص بازار، با استفاده از معیارهای ریسک و بازده، (در بازار دارای رخدادهای غیرمنتظره) مورد بررسی قرار دادند. نتایج این پژوهش نشان می‌دهد که بازار بورس اوراق بهادار تهران دارای رخدادهای قوی سیاه می‌باشد. همچنین با تشکیل پورتفوی بر مبنای استراتژی قوی سیاه نسبت به پورتفوی شاخص بازار، با وجود محدودیت‌های حاکم بر بازار، عملکرد بهتری مشاهده می‌شود[۱۹].

رهنمای رودپشتی و همکاران (۱۳۹۴) بهینه سازی پورتفوی با استفاده از بهینه سازی پایدار و تخمین ریسک و بازده پورتفوی و مقایسه ریسک و بازدهی پیش بینی شده این مدل با ریسک و بازده پیش بینی شده در مدل کلاسیک (مدل ماکویتز) را مورد مطالعه قرار دادند. در تحقیق مذکور، مشخص شد بازده پیش بینی شده پورتفوی در مدل پایدار تفاوت معناداری با بازده پیش بینی شده در مدل کلاسیک و ریسک پیش بینی شده در مدل پایدار با ریسک پیش بینی شده در مدل کلاسیک تفاوت معنا داری ندارد .اما با بررسی بازدهی و ریسک پورتفوی های تشکیل شده براساس وزن ارائه شده توسط هر یک از مدلها، مشخص گردید در بازار ایران بازده واقعی از هر دو روش تفاوت معناداری با یکدیگر ندارند .این در حالی است که ریسک واقعی پرتفوی های بهینه شده با روش پایدار کمتر از ریسک پرتفوی های بهینه شده با روش کلاسیک می باشد .نتایج بدست آمده در تخمین بازدهی کاملا منطبق بر یافته های مطالعات خارجی و در تخمین ریسک با این تحقیقات نتیجه متفاوتی دارد[۱۸].

- **کاپولا**

توابع کاپولا توابعی جهت ایجاد توزیع مشترک توزیع چندمتغیره هستند، یا به عبارت دیگر بین توابع توزیع چند متغیره و توابع توزیع حاشیه ای یک بعدی رابطه بر قرار می‌کنند[۱۴]. اسکالر[۳] (۱۹۵۹) نخستین بار تئوری مبنای توابع کاپولا را مطرح نمود[۱۵]. در حوزه کارکرد کاپولا در مطالعات مالی، امبرشز[۴] (۲۰۰۲) کاپولا را به حوزه مالی معرفی کرد[۶].

سریبونچیتا (۲۰۱۶) در بهینه‌سازی پورتفوی سنجه‌های CVaR و mean-CVaR را بعنوان شاخص ریسک مبنا قرار دادند. از C-vine و D-vine copula برای تعیین میزان وابستگی مدل قیمت‌گذاری دارایی ها بر بازده پورتفوی استفاده کردند. در ابتدا ساختار وابستگی بازده سهام منتج از مدل CAPM و در مرحله بعد اینکه چگونه ساختار وابستگی مدل قیمت گذاری می تواند بر بازدهی پورتفوی تاثیرگذار باشد، مورد بررسی قرار گرفت[۳].

در خصوص مطالعات داخلی صورت گرفته، سجاد و نوروزی (۱۳۹۳) با استفاده از داده های روزانه شاخص بورس و حجم مبادلات بازار سرمایه، وابستگی حجم-بازده را در دمهای بالا( حداکثر ) و پایین( حداقل )توزیعشان با استفاده از رویکرد کاپولا مورد تحقیق قرار دادند. نتایج بدست آمده نشان می‌دهد که وابستگی مشخص، و نامتقارنی بین حجم-بازده در این بازار وجود دارد.به عبارت دیگر بازده‌های خیلی بالا ( سود زیاد ) تمایل به همراه شدن با حجم خیلی زیاد را دارند، اما بازده های خیلی پایین رابطه‌ای با حجم مبادلات خیلی بالا یا خیلی پایین ندارند. نتیجه اول را منتج از این دلیل می‌دانند که حجم مبادلاتی اطلاعات جدیدی را به بازار منتقل می‌کند، بنابراین حجم مبادلات خیلی زیاد شرایط را جهت افزایش قیمت و در نتیجه افزایش بازده فراهم می‌کند[۱۴].

کشاورز حداد و حیرانی (۱۳۹۳) با انواع مختلف توابع کاپولا و مدل‌های واریانس ناهمسان شرطی تعمیم‌یافتهٔ ساختار وابستگی بین دو شاخص قیمتی محصولات شیمیایی و دارویی بورس تهران را مورد ارزیابی قرار داده و تأثیر ساختار وابستگی در برآورد ارزش در معرض ریسک سبد دارایی متشکل از آن‌ها را بررسی نموده اند. یافته‌ها حاکی از دقت و کفایت بیشتر رهیافت Copula-GARCHنسبت به مدل‌های متداول در پیش‌بینی ارزش در معرض ریسک سبد دارایی همچون M-GARCH، DCC-GARCH، EWMA، و روش‌های شبیه‌سازی تاریخی بوده است[۱۱].

C یک تابع کاپولای d- بعدی است که تابع توزیع تجمعی (c.d.f) چند متغیره می باشد با حاشیه‌های با توزیع یکنواخت در [0,1] و با ویژگی‌های ذیل:

۱. $C : [0,1]^d \to [0,1]$؛

۲. d افزایشی می‌باشد؛

۳. C حاشیه‌های $C_i$, (i=i, …, d) را با روابط ذیل دارد:

$$C_i(u) = C(1, \dots, 1, \dots, u, 1, \dots, 1) = u$$
$$u \in [0,1]$$

چنانچه $F(x_1, ...,x_d)$ تابع توزیع توام با توابع توزیع حاشیه‌ای $F_1(x_1), ..., F_d(x_d)$ باشد، کاپولای مربوط به $F$ تابع توزیع $C : [0,1]^d \rightarrow [0,1]$ است که رابطه ذیل برای آن برقرار می‌باشد:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(X_d); \theta)$$

که $\theta$ پارامتر کاپولا می‌باشد و پارامتر وابستگی نامیده می‌شود و وابستگی میان حاشیه‌ها را اندازه‌گیری می‌نماید. مبنا و اساس کاپولا، مجزا ساختن وابستگی از رفتار حاشیه‌ای تک متغیره هاست.

به این ترتیب کاپولای دو متغیره، تابع $C : [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ می‌باشد با ویژگی‌های ذیل [۵]:

۱. برای هر

$$u_1, u_2 \in [0,1] \quad C(u_1, 0) = 0 = C(0, u_2)$$

۲. برای هر

$$u_1, u_2 \in [0,1] \quad C(u_1, 1) = u_1 \,\&\, C(1, u_2) = u_2$$

۳. برای هر

$$(u_1, u_2), (u_1', u_2') \in [0,1]^2 \;, \quad u_1 \le u_2 \,\&\, u_1' \le u_2'$$
$$C(u_2, u_2') - C(u_2, u_1') - C(u_1, u_2') + C(u_1, u_1') \ge 0$$

- **تئوری ارزش حدی و توزیع تعمیم یافته پارتو**

تئوری ارزش حدی (EVT) به عنوان یکی از مهمترین قوانین آماری برای علوم کاربردی در طول 50 سال گذشته ظاهر شده و به تازگی در حوزه مالی نیز کاربرد گسترده یافته است . ویژگی متمایز EVT کمی‌سازی رفتار تصادفی یک فرآیند در سطوح غیر طبیعی بسیار زیاد یا بسیار کم است [۸].

ایوسوک[۵] و سریبونچیتا[۶] (۲۰۱۶) تئوری ارزش حدی را برای بررررسی دقیق تر توزیع دنباله‌ای ریسک بازار توام با توابع کاپولا برای ارزیابی وابستگی بین بازارهای سهام کشورهای آسیایی بکار گرفتند. نتایج نشان دادند که در میان مدل‌های مورد بررسی شامل t copula GARCH-EVT, C-vine copula GARCH-EVT و D-vine copula GARCH-EVT مدل D-vine copula GARCH-EVT مرز کارا را بهتر از سایرین شبیه سازی می‌کند[۳]. فلاح طلب و عزیزی (۱۳۹۳) رویکرد فراتر از آستانه (تئوری ارزش حدی) را در پیش بینی ارزش در معرض ریسک شاخص کل بورس اوراق بهادار تهران بکار گرفته و نتایج این روش را با نتایج حاصل از دیگر رویکردها شامل روش خود رگرسیونی مشروط بر ناهمسانی واریانس، شبیه سازی تاریخی و واریانس-کوواریانس مورد مقایسه قرار دادند. نتایج تحقیق نشان می دهد که استفاده از این رویکرد در سطوح اطمینان بالا قابل اتکا میباشد [۲۲].

تئوری ارزش حدی، به جای ارزش های متوسط، روی مقادیر کرانی تمرکز می‌نماید. از توزیع‌های پرکابردی که در نظریه مقدار کرانی مورد استفاده قرار می‌گیرد توزیع پارتو تعمیم یافته (GPD[۷]) می باشد. GPD بر مقادیر متجاوز از آستانه مشخص $\lambda$ متمرکز است این راهبرد روی مشاهداتی تمرکز می‌کند که از یک آستانه معین تجاوز می‌کنند[۹].

بالکما و دی هان و نیز پیکاندیس طی قضیه‌ای نشان دادند که برای $\lambda$ هایی که به اندازه کافی بزرگ است، تابع توزیع مقادیر فراتر از آستانه را می‌توان با توزیع تعمیم یافته پارتو تقریب زد؛ زیرا با بزرگ شدن آستانه، توزیع ارزش‌های فراتر از آستانه یعنی $F\lambda\ (y)$ به توزیع تعمیم یافته پارتو نزدیک می‌شود.

توزیع تعمیم یافته پارتو به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$G_{\xi,\mu,\sigma}(x) = 1 - \left[1 + \xi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right]^{\frac{-1}{\xi}}$$

در رابطه بالا x همان ارزش‌های فراتر از آستانه یا X های بزرگ‌تر از $\lambda$ و $\mu$ نیز معادل آستانه یا $\lambda$ است. $\sigma$ پارامتر معیار توزیع و سنجه پراکندگی x است. پارامتر $\xi$ نیز شاخص دنباله بوده و بر شکل یا تراکم دنباله توزیع دلالت دارد. پارامترهای این توزیع نیز معمولا بر اساس روش حداکثر راست نمایی تخمین زده می‌شوند[۱۰].

- **بهینه‌سازی با تابع هدف ارزش در معرض ریسک شرطی**

ارزش در معرض ریسک، و یا VaR، معیار مورد توجهی در مدیریت ریسک می باشد. با این وجود، بی ثباتی این معیار در سناریوهای مختلف ارزیابی از مشکلات اصلی بکارگیری آن می باشد. بعلاوه اینکاه در بکاگیری VaR،برقرار نبودن جمع‌پذیری و تحدب در مواجهه با توزیع‌های غیربیضوی۸ نقصان با اهمیتی شمرده می‌شود. ارزش در معرض ریسک شرطی،CvaR ، معیاری جایگزین برای VaR می باشد. CvaR بعنوان میانگین وزنی میان VaR و زیان‌های مورد انتظاری که بزرگتر از VaR هستند، تعریف می‌شود. در نتیجه CvaR یک حد بالایی برای VaR تعریف می‌نماید. با این وجود، CvaR یک تابع محدب است و برای محاسبات سناریو مناسب می باشد. راکفالر (۲۰۰۰) نشان داد که با بکارگیری تکنیک های برنامه‌ریزی خطی، می توان CvaR را حداقل ساخت که این امر منجر می شود شاخص CvaR در مقایسه با VaR در مدیریت پورتفوی بسیار اثربخش تر باشد[۴].

راکفالر[۹] (۲۰۰۰) رویکرد بهینه‌سازی با هدف حداقل ساختن CVaR را مطرح نمود[۱۳]. ارتزنر[۱۰] (۱۹۹۹) [۱] و راکفالر (۲۰۰۲) [۱۲] عنوان نمودند که VaR معیار منسجمی نبوده و CVaR می‌تواند ویژگی‌های مد نظر برای شاخص ریسک را فراهم سازد و در نتیجه بکارگیری آن بر VaR مزیت دارد.

بای[۱۱] و سان[۱۲] (۲۰۰۷) Archimedean copula و شبیه‌سازی مونت کارلو را جهت بهینه‌سازی پورتفوی با حداقل ساختن CVaR بکار گرفته و نتایج بهتری در مقایسه با رویکرد بهینه‌سازی با فرض نرمال بودن توزیع داده‌ها، حاصل گردید[۴].

فلاح پور و رحیمی (۱۳۹۴) نوسان آتی بازار طلا و نفت را با استفاده از مدل ارزش در معرض ریسک شرطی برآورد نمودند. در پیش بینی این ارزش از برازش سه مدل ناهمسانی واریانس شرطی متقارن و نامتقارن یعنی GARCH، EGARCH و TGARCH استفاده شده است. تمامی محاسبات با فرض دو توزیع نرمال و تی‌استودنت انجام شده اند. تایج نشان می دهند که برآورد ارزش در معرض ریسک شرطی در بازار نفت نسبت به بازار طلا از اعتبار بیشتری برخوردار است. در میان سه مدل ناهمسانی واریانس، معتبرترین برآورد مربوط به ارزش برآوردی با مدل TGARCH در توزیع تی استودنت است[۷].

نیکومرام و زمردیان، به این موضوع پرداختند که آیا مدل اقتصاد سنجی و الگوهای منشعب از آن توان تعیین ارزش در معرض خطر پرتفوی شرکتهای سرمایه گذاری فعال در بازار سرمایه کشور را دارا می باشند. از بین پنج مدل مورد استفاده، مدل EGARCH از بیشترین قدرت تبیین برخوردار بوده (۱۷ مورد) و مدل TGARCH تنها در دو مورد از ۲۱ مورد موفق بوده است. بنابراین می توان بیان نمود که این مدلها از کارآیی لازم برخوردار بوده و همچنین قدرت تبیین آنها در تعیین ارزش در معرض خطر یکسان نیست[۲۰].

پورتفویی متشکل از d دارایی با اوزان $w_i$، وزن هر دارایی i که در زمان t به پورتفوی تخصیص داده شده است، مفروض است. چنانچه $f(w; r)$ برابر تابع زیان پورتفوی باشد، $w \in R^d$ برداری ازبازدهی پورتفوی و r برداری از بازده دارایی‌های آن و با این فرض که $\xi$ یک حد آستانه ای معینی باشد، ارزش در معرض ریسک پورتفوی در سطح $\alpha$ در قالب رابطه ذیل تعریف می شود:

$$VaR(\alpha) = inf\{\xi \in R : P(f(w,r) \le \xi) \ge \alpha\}$$

چنانچه $r_p$ برابر بازده پورتفوی باشد، $r_p$ بعنوان متغیر تصادفی تعریف می شود که $r_p = w_1r_1+w_2r_2+\cdots+w_dr_d = w^Tr$. حال چناچه فروش استقراضی مجاز نباشد، محدودیت وزنی زیر نیز اعمال می شود.

$$\sum_{i=1}^{d} w_i = 1$$

چنانچه $p(r)$ برابر توزیع توام بازده تصادفی دارایی ها باشد، احتمال اینکه $r_p$ بیشتر از مقدار معین $r^*$ باشد، براساس رابطه ذیل نعیین می شود:

$$\int_{r_p > r^*} p(r)dr$$

که برابر است با:

$$\psi(w,\xi) = \int_{f(w,r) \le \xi} p(r)dr$$

که در آن $\psi(w; \xi)$ بیانگر تابع توزیع تجمعی برای زیان مربوط w است. با فرض پیوسته بودن $\psi(w; \alpha)$ و با توجه به $\xi$ ، $VaR(\alpha)$ و $CVaR(\alpha)$ برای زیان $f(w; r)$ مرتبط با w در هر سطح اطمینانی $\alpha \in (0; 1)$ می تواند براساس روابط ذیل تعریف شوند[۴]:

$$VaR(\alpha,w) = min\{\xi \in R : \psi(w,\xi) \ge \alpha\}$$
$$CVaR(\alpha,w) = \frac{1}{1-\alpha}\int_{f(w,r) \ge VaR(\alpha,w)} f(w,r)p(r)dr$$

براساس تعریف راکفالر (۲۰۰۰) $CVaR(\alpha)$ برای زیان مرتبط با هر w براساس روابط ذیل برقرار است[۱۲]:

$$CVaR(\alpha) = min_{\xi \in R} F_\alpha(w,\xi)$$

$$(w,\xi) = \xi + \frac{1}{1-\alpha}\int_{r\in R^n} max[f(w,r)-\xi,0]\,p(r)dr$$

به این ترتیب مساله حداقل سازی ارزش در معرض ریسک شرطی به این شرح قابل تعریف است:

$$\begin{aligned}
&minimize \quad && \xi + \frac{1}{1-\alpha}\int_{r\in R^n} max[f(w,r)-\xi,0]\,p(r)dr \\
&subject\ to \quad && \sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \qquad ,x_i \geq 0 \\
&-w^T E(r) \leq -r^* &&
\end{aligned}$$

## ۳- فرضیه های پژوهش

فرضیه این تحقیق به شرح ذیل تعریف می شود:

**ریسک پورتفوی بهینه مبتنی بر داده های شبیه سازی شده با مدل کاپولا به‌طور معناداری از ریسک پورتفوی بهینه مبتنی بر داده های تاریخی کمتر است.**

## ۴- روش شناسی پژوهش

روش پژوهش توصیفی و پژوهش کاربردی است.

داده‌های مورد بررسی مقادیر روزانه سه شاخص محصولات شیمیایی، فلزات اساسی و مواد دارویی در بورس اوراق بهادار تهران در بازه‌ی زمانی سال های ۸۵ الی ۸۹ می‌باشند. بازه مذکور به دلیل ثبات بیشتر در بازار در این مقطع (در مقایسه با سال های بعد) مورد توجه قرار گرفته است.

جهت آزمون مدل، بازه‌ی زمانی مورد مطالعه به دو بخش تقسیم گردید. ۵۰۰ روز معاملاتی نخست، مبنای پیش بینی اوزان بهینه و ۲۰۰ روز باقی مانده، بعنوان دوره کنترل، مبنای بررسی عملکرد پورتفوی قرار گرفته اند. جهت آزمون فرضیه، آماره Fisher مبنای مقایسه ریسک قرار داده شده است. در تحلیل داده ها از نرم افزار MATLB بهره گرفته شده است.

همه متغیرهای پیوسته می توانند به متغیرهای توزیع یکنواخت تبدیل شوند، لذا برای تعریف کاپولا $C(u_1, u_2, \ldots, u_d)$ کافیست ساختار وابستگی میان متغیرهای $u_i$ با توزیع یکنواخت، تعیین شود. کاپولا متناسب، تابعی است که ساختار وابستگی تشکیل دهنده حاشیه ها را تجسم نماید. ساختار وابستگی تجسم شده توسط کاپولا، می تواند براساس توزیع توام F و حاشیه های آن $F_i$ بازیابی شود. در این پژوهش برآورد پارامترهای کاپولا، با استفاده از توابع مربوط در نرم افزار MATLAB صورت گرفته است. جهت برآورد حدود آستانه ای لازم نیز توزیع تعمیم یافته پارتو مبنا قرار گرفته است.

رویکرد مورد توجه در شبیه سازی داده ها به این شرح است:

- جهت محاسبه توزیع یکنواخت پیوسته توابع توزیع حاشیه‌ای بازده شاخص‌های مورد مطالعه، حدود آستانه‌ای متغیرها با استفاده از تابع توزیع پارتو تعمیم یافته برآورد شده و داده های مربوط با توزیع یکنواخت (مقادیر واحد کاپولا) استخراج می‌گردند.
- پارامترهای تابع کاپولا، براساس مقادیر کاپولا و مبتنی بر توزیع t-student برآورد می‌گردند.
- پس از محاسبه پارامترها، مقادیر کاپولا به ازای ۱۰ ۰۰۰ نقطه شبیه‌سازی شده و با استفاده از توابع معکوس، مقادیر بازده شبیه‌سازی شده براساس مقادیر کاپولا، حاصل می‌گردند.

## ۵- یافته های پژوهش

در ابتدا نتایج تجربی در فرایند بهینه‌سازی با داده‌های شبیه‌سازی شده بر اساس تابع کاپولا از نظر می‌گذرد.

همان طور که در بخش های قبل تشریح گردید از اهداف این پژوهش مدلسازی توام قیمتهای سهام به نحو صحیح با استفاده از تابع دو متغیره کاپولا می باشد. برای تحقق این هدف، بازدهی قیمت هر سهم به طور مجزا مورد بررسی و توصیف قرار گرفت. توزیع هریک از سری های بازدهی با توزیع تعمیم یافته پارتو تطبیق داده شد. با هدف تطبیق و توصیف بهتر رفتار بازده ها در هر دنباله از توزیع پارتو، تئوری ارزش حدی مبنا قرارداده شد و به این ترتیب مقادیر حاشیه ای هر یک از بازده ها محاسبه گردید.

در گام بعد با استفاده از cdf بازده ها، مقادیر حاشیه ای متغرها به مقادیر واحد کاپولا (u) منتقل گردید.

جهت برآورد پارامترهای کاپولا با استفاده از روش حداکثر درست نمایی، تابع t-student مبنای محاسبات قرار داده شد. در جداول ذیل مقادیر ضرایب همبستگی میان بازده‌های تاریخی و همچنین همبستگی برآوردی با استفاده از مدل کاپولا آورده شده است:

**جدول ۱- ضرایب همبستگی داده های تاریخی**

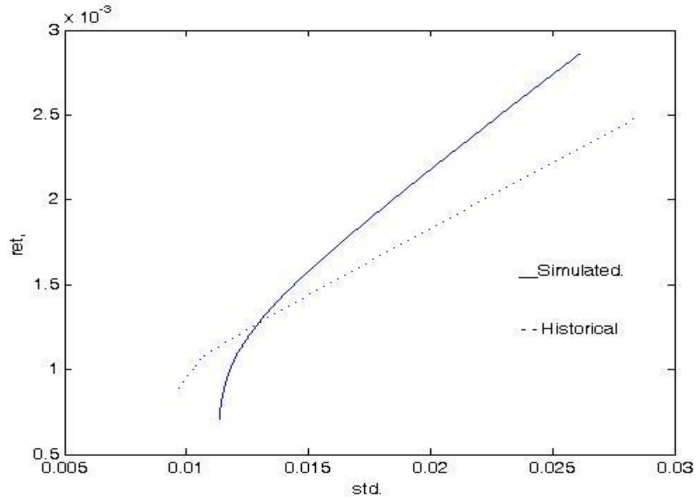
| | | |
|---|---|---|
| 1 | -0.0174 | 0.0968 |
| -0.0174 | 1 | 0.0552 |
| 0.0968 | 0.0552 | 1 |

**جدول ۲- همبستگی برآوردی با استفاده از کاپولا**

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 0.1288 | 0.0818 |
| 0.1288 | 1 | 0.1713 |
| 0.0818 | 0.1713 | 1 |

پس از محاسبه پارامترها، مقادیر واحد کاپولا به ازای ۱۰ ۰۰۰ نقطه شبیه‌سازی شده و با استفاده از توابع معکوس، مقادیر بازده شبیه‌سازی شده براساس مقادیر واحد کاپولا و توزیع حاشیه ای بازده ها، حاصل می‌گردند.

پس از شبیه‌سازی بازده ها، بهینه‌سازی پورتفوی سرمایه‌گذاری بر مبنای مدل مارکویتز، با هدف حداقل ساختن ارزش در معرض ریسک شرطی و با مبنا قرار دادن بازده‌های شبیه‌سازی‌شده صورت پذیرفت. جهت ارزیابی عملکرد مدل در بهینه‌سازی، بهینه‌سازی به همین ترتیب براساس داده‌های تاریخی انجام گرفت. در تصویر ذیل مرز کارا حاصل از هر دو رویکرد مشاهده می‌شود.




**شکل (۱) مرز کارا**

به این ترتیب، بهینه‌سازی با بکارگیری بازده‌های شبیه‌سازی شده با مدل کاپولا، بهبود قابل توجهی را در کاهش ریسک منجر گردیده است. جهت آزمون فرضیه، ریسک حاصل از بکارگیری هر یک از مدل‌ها در دوره ارزیابی محاسبه و از منظر آماری مورد بررسی قرار می‌گیرد. با انجام این آزمون در واقع معناداری نتایج حاصل از مدلسازی از منظر آماری مورد کنترل قرار می گیرد. فرض‌های آماری مربوط به این شرح تعریف می‌شوند.

$H_0: \sigma_c^2 \geq \sigma^2$

$H_1: \sigma_c^2 < \sigma^2$

$\sigma^2_C$ برابر واریانس محقق پورتفوی بهینه براساس داده‌های شبیه‌سازی شده و $\sigma^2$ برابر واریانس محقق پورتفوی بهینه براساس داده‌های تاریخی است. آماره‌ی فیشر جهت آزمون فرضیه بکار گرفته می‌شود.

$$F_{(df_1,df_2)} = \frac{\chi_C^2/df_1}{\chi^2\ /df_2}$$

در رابطه فوق، تعداد پورتفوهای مورد بررسی در آزمون برابر ۱۵۰۰ و df1 و df2 برابر ۱۴۹۹ می‌باشند. فرض صفر آماری درصورتی رد می شود که مقدار آماره کمتر از میزان متناظر آن در جدول توزیع فیشر باشد.

در مقایسه‌ی واریانس محقق پورتفوی بهینه براساس داده‌های شبیه‌سازی شده ($\sigma^2_C$) با واریانس پورتفوی بهینه براساس داده‌های تاریخی، مقدار آماره فیشر برابر ۰/8912 با sig = 0/01 ، و مقدار $F_{1-\alpha}$ با درجه‌ی آزادی df1 = ۱۴۹۹ و۱۴۹۹ =df2 در سطح خطای ۵درصد برابر ۰/۹۱۸۵ است. لذا فرض صفر تایید نشده و کاهش ریسک پورتفوی سرمایه‌گذاری براساس اوزان حاصل از بکارگیری کاپولا، تایید می‌گردد.

## ۶- نتیجه گیری و بحث

استفاده از تئوری کاپولا به تحقیقات اسکالر (۱۹۵۹) باز می‌گردد اما استفاده از این ابزار در حوزه مالی در جهان در سال‌های گذشته رشد بسیار داشته است. از جمله کارکردهای کاپولا می‌توان به مدیریت ریسک، وابستگی‌های سری زمانی و قیمت‌گذاری مشتقات مالی اشاره نمود. کاربرد زیاد کاپولا در نظریه‌های مالی به این دلیل است که استفاده از مدل‌های مالی را برای هر متغیری با هر توزیع حاشیه‌ای فراهم نموده است.

مدلسازی وابستگی یکی از عوامل کلیدی در مدیریت ریسک سبد سرمایه‌گذاری می‌باشد. انتخاب یک مدل نامتناسب منجر به انتخاب پورتفوی غیر بهینه می‌شود.

در این مطالعه، جهت ارزیابی امکان بهبود در حداقل ساختن ریسک پورتفوی با بکارگیری تابع کاپولا، پورتفویی از سه شاخص صنعت در بورس اوراق بهادار تهران تشکیل شد.

به منظور تعیین اوزان بهینه پورتفو، هدف حداقل ساختن معیار ارزش در معرض ریسک شرطی قرار داده شد و بازده های شبیه سازی شده براساس تابع کاپولا و مدل ارزش حدی، بعنوان داده های ورودی مدل مبنا قرار گرفتند. نتیجه بهینه سازی بر این اساس با بهینه سازی با داده های صرفا تاریخی (بدون لحاظ نتایج حاصل از تابع کاپولا) مورد مقایسه قرار گرفتند. علاوه بر اینکه در بهینه سازی با دو رویکرد مذکور، مرز کارای حاصل از اوزان بهینه به نحو قابل توجهی بیانگر بهبود نتابج در مدل کاپولا بود، آزمون های آماری نیز عملکرد بهتر مدل را در دوره ارزیابی تایید می نمایند.

مرز کارا نمودی از پورتفوهای بهینه به ازای سطوح مختلف ریسک می باشد. بدیهی است با ارتقای مدل بهینه سازی داده‌ها، مرز کارا می بایست به ازای سطوح مختلف بازده نمایشگر ریسک کمتر باشد. با جابجایی مرز کارا به طرز تشریح شده در بخش یافته های پژوهش، و پس از آن با تایید آماری این تغییر، پرواضح است بهینه سازی با شبیه سازی داده ها براساس مدل کاپولا توانسته بهبود مدیریت ریسک پورتفو (در قالب کاهش ریسک) را منجر گردد. به این ترتیب پیشنهاد می شود فعالان در حوزه سبدگردانی و سرمایه گذاری در سهام، جهت استخراج شاخصی برای تصمیم گیری در تعیین اوزان هریک از دارایی ها در سبد سرمایه گذاری خود، صرفا براساس داده های تاریخی اقدام به بکارگیری مدل مارکویتز ننموده و تعدیلات لازم در همبستگی میان داده ها را با استفاده از مدل های مربوط نظیر مدل کاپولا، بکار گرفته و سپس اقدام به بهینه سازی سبد سرمایه گذاری خود نمایند.

در مقایسه نتایج این پژوهش با نتایج مطالعات مشابه نیز، همچنان که در تحقیقاتی نظیر مطالعه کشاورز حداد و حیرانی (۱۳۹۳) در ارزیابی ساختار وابستگی با استفاده از انواع مختلف توابع کاپولا در برآورد ارزش در معرض ریسک، کفایت مدل های مذکور مورد تایید قرار گرفت و نیز در مطالعات بای[۱۳] و سان[۱۴] (۲۰۰۷) برتری شبیه‌سازی مونت کارلو جهت بهینه‌سازی پورتفوی با حداقل ساختن CVaR مورد تایید قرار گرفت، در این بررسی نیز بهبود نتایج حاصل گردید.

پس از ارائه مدل مارکویتز، مدل های متعددی بر توسعه این مدل و بهبود نتایج حاصل از آن متمرکز گردیدند، کما اینکه افشارکاظمی و همکاران (۱۳۹۲) با بکارگیری الگوریتم ژنتیک تایید نمودند که بر خلاف مدل مارکویتز همیشه متوع ساختن سبد مناسب نیست. همچنین نتایج مطالعات صادقی شریف و همکاران (۱۳۹۵) نشان می دهد در بورس اوراق بهادار تهران، با تشکیل پورتفوی بر مبنای استراتژی قوی سیاه نسبت به پورتفوی شاخص بازار، با وجود محدودیت‌های حاکم بر بازار، عملکرد بهتری مشاهده می‌شود. رهنمای رودپشتی و همکاران (۱۳۹۴) نیز با مطالعات انجام شده دریافتند که ریسک واقعی پرتفوی های بهینه شده با روش پایدار کمتر از ریسک پرتفوی های بهینه شده با روش کلاسیک می باشد. نتایج این تحقیق نیز نشان می دهد که با بکارگیری مدل مارکویتز و ورودی های منتج از کاپولا می توان بهبود در نتایج بهینه سازی را محقق ساخت.

اگر چه مدل های کاپولا از تنوع بیشتری برخوردارند و بسیاری از مطالعات جهانی طیف متنوعی از توابع کاپولا را مورد توجه قرار داده‌اند، در این بررسی، تابع کاپولا با توزیع t-student، مبنا قرار گرفت لذا پیشنهاد می‌شود در مطالعات بعدی، اثربخشی هریک از این توزیع ها در بهبود عملکرد مدل مورد توجه قرار گیرد. همچنین در حوزه تخصیص دارایی‌ها، می توان مدل هایی نظیر مدل های خانواده GARCH، شبیه‌سازی مونت کارلو و CAPM را توام با توابع متناسب کاپولا مورد بحث و بررسی قرار داد کما اینکه در مطالعات بین‌المللی نیز مفاهیم این چنینی مورد توجه قرار گرفته‌اند.

در این پژوهش پورتفویی از صنایع مورد بررسی قرار گرفته است، در حالیکه با هدف کاربردی‌تر کردن نتایج مطالعه شایسته بود پورتفویی از سهام مورد توجه قرار می‌گرفت منتها به دلیل محدودیت ناشی از منقطع بودن تعداد روزهای معاملاتی سهام در بورس در فواصل بعضا طولانی، ناگزیر این رویکرد مورد توجه قرار گرفت.

## فهرست منابع


* افشارکاظمی، محمدعلی، فلاح شمس، میرفیض، کارگر، مرضیه، (۱۳۹۳)، تدوین مدلی جدید برای بهینه سازی پرتفوی بورس با استفاده ازروش مارکوویتز واصلاح آن توسط مدل کسینوس ها وحل آن توسط الگوریتم ژنتیک، فصلنامه مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار، شماره هجدهم.
* رستمی، علی، نیک نیا، نرگس، (۱۳۹۲)، تأثیر متنوع سازی پورتفوی بر ارزش در معرض ریسک در بورس اوراق بهادار تهران، فصلنامـه علمی پژوهشی دانش سرمایه گذاری، سال دوم، شماره ششم.

* رهنمای رودپشتی، فریدون ، نیکومرام، هاشم، طلوعی اشلقی، عباس، حسین زاده لطفی، فرهاد، بیات، مرضیه، (۱۳۹۴)، بررسی کارایی بهینه سازی پرتفوی براساس مدل پایدار با بهینه سازی کلاسیک در پیش بینی ریسک و بازده پرتفوی، مجله مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار، شماره بیست و دوم.
* صادقی شریف، سیدجلال ، اصولیان، محمد، ابوالفتحی، ماندانا، (۱۳۹۵)، ارزیابی عملکرد پرتفوی با استفاده از استراتژی سرمایه گذاری قُوی سیاه ، فصلنامه علمی پژوهشی دانش سرمایه گذاری، سال پنجم، شماره هجدهم.
* فلاح طلب، حسین، عزیزی ، محمدرضا، (۱۳۹۳)، کاربرد تئوری مقدار فرین در پیشبینی ارزش در معرض ریسک، فصلنامـه علمی پژوهشی دانش سرمایه گـذاری، سال سوم، شماره دوازدهم.
* قاسمی، حمیدرضا ، نجفی، امیرعباس ، (۱۳۹۱) ، بهینه سازی پرتفوی سهام در شرایط مجاز بودن فروش استقراضی وبرخی محدودیت های کاربردی بازار سرمایه، تحقیقات مالی، دوره ۱۴ ، شماره ۲.

نیکومرام، هاشم، زمردیان، غلامرضا، (۱۳۹۳)، بررسی توان تبیین مدل های اقتصادسنجی در سنجش میزان ارزش در معرض خطر پرتفوی شرکتهای سرمایه گذاری جهت تعیین پرتفوی بهینه در بازار سرمایه ایران، فصلنامـه علمی پژوهشی دانش سرمایهگـذاری، سال سوم، شماره دوازدهم

* Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.M., Heath, D., (1999) Coherent measures of risk, Math. Financ. 9,203–228.
* Autchariyapanitkul K., Piamsuwannakit S., Chanaim S. and Sriboonchitta S.; (2016), Optimizing stock returns portfolio using the dependence structure between capital asset pricing models: a Vine Copula-based; Springer International Publishing Switzerland, 319-331.
* Ayusuk A.; Sriboonchitta S., (2016), Copula based volatility models and extreme value theory for portfolio simulation with an application to asian stock markets, Springer International Publishing Switzerland, 279-293.
* Bai M. ; Sun L., (2007), Application of Copula and Copula-CVaR in the multivariate portfolio optimization; Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 231-242 .
* Dharmawan, K. , (2013), Measuring and optimizing conditional value at risk using copula simulation, South East Asian Conference on Mathematics and its Application.
* Embrechts, P., McNeil, A., (2002), Correlation and dependence properties in risk management: properties and pitfalls, Dempster, M. (ed.) Risk Management: Value at Risk and Beyond, Cambridge University Press, 176-223.
* Fallahpour, S. , Rezvani, F. , Rahimi, M., (20150, Estimating conditional VaR using symmetric and non-symmetric autoregressive models in old and oil markets, Financial Knowledge of Security Analaysis, Volume 8 , Number 26; 1 - 18.
* Fernandez V. , (2005), Risk management under extreme events, International Review of Financial analysis, 113-148.
* Gilli M, Kellezi E. , (2003), An application of extreme value theory for measuring risk, Department of Econometrics, University of Geneva and FAME..
* Gorgani M., Asl Hadad A., Shariyar B., (2013), The calculation of optimal interest rate of fire insurance catastrophe bonds in Iran using extreme value theory, Jornal of Economic Researche, Volume 14 , Number 1; 101- 116.
* keshavarz Haddad, G. , Heyrani, M. , (2015), Estimation of Value at Risk in the Presence of Dependence Structure in Financial Returns: A Copula Based Approach, Jornal of Economic Researches,Volume 4 , Number 49, 869-902.

* Rockafellar, R.T., Uryasev, S. , (2002), Conditional value-at-risk for general loss distributions, Journal of Banking & Finance, 26, 1443–1471.
* Rockafellar, R.T., Uryasev, S.,(2000), Optimization of conditional value-at-risk, Journal of Risk , 21–41.
* Sajjad R., Norouzi M., (2013), Extreme return-volume dependence in Iran equity market with a Copula approach, Financial Engeneering and Securities Management, volume 3 , number 13; 91 - 102.
* Sklar, A., (1995), Fonctions de rpartition n dimensions et leurs marges, Publ. Inst. Statist. Univ. Paris 8, 229–231.


## یادداشت‌ها

[1] Mean-Variance theory
[2] Markowitz
[3] Sklar
[4] Embrechts
[5] Ayusuk
[6] Sriboonchitta
[7] Generalized Pareto distribution
[8] non-elliptical
[9] Rockafellar
[10] Artzner
[11] Bai
[12] Sun
[13] Bai
[14] Sun